

Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents

Par *Hugues Randriambololona*, à Paris.

Introduction

Soient K un corps de nombres, \mathcal{O}_K son anneau d'entiers, \mathfrak{X} un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ de fibre générique \mathfrak{X}_K réduite, et $\overline{\mathcal{L}}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module inversible ample dont les fibres sur l'espace analytique réduit $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ sont, de façon compatible à la conjugaison complexe, munies d'une métrique continue à courbure semi-positive.

Si \mathcal{C} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent de support de dimension absolue $d \leq \dim \mathfrak{X}$, on note $[\mathcal{C}] \in Z_d(\mathfrak{X})$ le cycle associé à \mathcal{C} , défini comme suit :

$$[\mathcal{C}] = \sum_{x \in \mathfrak{X}_{(d)}} (\text{lg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x)[x].$$

La hauteur de ce cycle relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ peut être définie comme le nombre d'intersection arithmétique $(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d \cdot [\mathcal{C}]) = \sum_{x \in \mathfrak{X}_{(d)}} (\text{lg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x) (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_x)^d \cdot [x])$, suivant la théorie de l'intersection arithmétique de Gillet et Soulé (cf. [6], et [13] pour la généralisation aux métriques non C^∞).

Supposons maintenant donnés un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module localement libre hermitien $\overline{\mathcal{E}}$, un sous- $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{F} de \mathcal{E} , et un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules $p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ qui fait de \mathcal{C} un quotient de \mathcal{F} , ou encore, un «sous-quotient» de \mathcal{E} . Pour tout entier n , le \mathcal{O}_K -module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ peut être muni, au choix, des normes uniformes, ou bien, si $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ est muni d'une forme volume positive continue compatible à la conjugaison complexe, des normes d'intégration L^2 . Par considération des normes restreintes, on obtient aussi une structure de \mathcal{O}_K -module normé sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$, puis, par passage au quotient, sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ si n est assez grand.

Le résultat principal de ce texte est la généralisation du «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» de [7] dans ce cadre des faisceaux cohérents munis de «normes de sous-quotient». On montre en effet :

Théorème. — *Sous les hypothèses précédentes, le degré d'Arakelov du \mathcal{O}_K -module normé $\overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}$ admet le développement asymptotique*

$$\widehat{\deg \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})} = \frac{n^d}{d!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d \cdot [\mathcal{C}]) + o(n^d)$$

quand n tend vers l'infini.

Ce théorème apporte une réponse à deux questions déjà apparues dans la littérature :

- (i) Dans [7] paragraphe 5.3.2, il est demandé si le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique prouvé pour un faisceau localement libre pouvait s'étendre à n'importe quel faisceau cohérent, et plus particulièrement à un sous-faisceau cohérent d'un faisceau localement libre hermitien, muni des normes restreintes ; ceci est bien un cas particulier du problème résolu ici, du moins en ce qui concerne le terme de degré maximal de cette formule de Hilbert-Samuel arithmétique.
- (ii) Le faisceau structural \mathcal{O}_Σ d'un sous-schéma fermé Σ de \mathfrak{X} est naturellement muni d'une structure de quotient du faisceau structural $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} , ce dernier disposant d'une structure métrique évidente ; en appliquant le théorème précédent avec $\mathcal{C} = \mathcal{O}_\Sigma$ on obtient ainsi un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les hauteurs de sous-schémas, comme conjecturé dans [16] A.2.1.

Il serait intéressant d'examiner si le résultat obtenu ici ne dispose pas d'applications en théorie de l'approximation diophantienne, en autorisant par exemple l'utilisation de «fonctions auxiliaires» tordues par des sections d'un faisceau cohérent (non nécessairement localement libre).

Au moyen d'un dévissage, on montre que pour prouver le théorème en toute généralité, il suffit de le faire dans le cas particulier où \mathcal{C} est de la forme $i_*\mathcal{M}$, où $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est le morphisme d'immersion d'un sous-schéma fermé intègre Z de \mathfrak{X} et \mathcal{M} un \mathcal{O}_Z -module inversible. On se ramène alors à la version classique du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique, ou plutôt à sa généralisation au cas singulier donnée dans [18], au moyen d'un résultat de comparaison de normes dont l'essentiel réside en l'énoncé de prolongement de sections holomorphes d'un fibré vectoriel hermitien sous-quotient avec contrôle des normes qui constitue le point (ii) du théorème suivant :

Théorème. — *Soient X un espace analytique 1-convexe¹ réduit, \overline{L} un \mathcal{O}_X -module inversible hermitien à courbure strictement positive, \overline{E} un \mathcal{O}_X -module*

¹par exemple, compact, ou de Stein (cf. §§2.2–2.3)

localement libre hermitien de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé réduit de X , et \overline{V} un \mathcal{O}_Y -module localement libre hermitien de type fini. On suppose donnés un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent F de E et un morphisme surjectif

$$p : F \twoheadrightarrow i_* V$$

de \mathcal{O}_X -modules cohérents. Alors :

- (i) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide B de Y , il existe un réel $C > 0$ et un compact non vide A de X tels que pour tout $n \geq 0$, pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et pour tout $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\tilde{s}) = i_* s$, on ait

$$\|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} \geq C e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}.$$

- (ii) Il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide A de X , un réel $C' > 0$ et un compact non vide B de Y , tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ il existe $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\tilde{s}) = i_* s$ et

$$\|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} \leq C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}.$$

On trouvera dans la littérature des énoncés de prolongement analogues à celui-ci (souvent dans le cas particulier $F = E$ et $V = E|_Y$) établis pour la plupart au moyen de la technique des estimées L^2 de Hörmander, et pouvant éventuellement donner un contrôle plus fort sur les normes, mais au prix de certaines hypothèses de lissité (voir par exemple [4], [14], ou encore [16], chap. 3) ou de la connaissance *a priori* de l'existence d'un prolongement convenable de s sur un voisinage donné de Y (cf. [18], sect. 2). L'originalité du résultat présenté ici est donc de s'affranchir totalement de ces hypothèses annexes. Pour y parvenir on utilise la théorie des espaces 1-convexes (après s'être placé sur le fibré en disques du dual L^\vee) et les techniques d'espaces de Fréchet de la théorie topologique des faisceaux cohérents sur un espace analytique complexe, suivant en cela la méthode introduite par Bost dans [2], app. A.

Conventions. — On utilisera ici la terminologie usuelle des espaces analytiques complexes (non nécessairement réduits) et des fonctions continues, C^∞ , holomorphes, plurisousharmoniques, etc. sur iceux, telle qu'elle est rappelée par exemple au début de [8] et de [15] (on gardera notamment à l'esprit le théorème 5.3.1 de [5], selon lequel les deux définitions raisonnables des fonctions plurisousharmoniques coïncident).

Les métriques hermitiennes sur les faisceaux analytiques localement libres seront toujours supposées continues. Un faisceau inversible hermitien \overline{L} sur un espace analytique complexe sera dit à courbure semi-positive (resp. strictement positive) si, pour toute section l de L ne s'annulant pas sur un ouvert U , la fonction $-\log \|l\|$ est plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) sur U .

Remerciements. — L'auteur remercie J.-B. Bost pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail et pour la version préliminaire de [2] qu'il a bien voulu lui communiquer.

1. Sous-quotients

1.1. — Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On rappelle que si M est un objet de \mathcal{A} , les sous-objets des quotients de M s'identifient naturellement aux quotients des sous-objets de M , ou encore aux gradués M_1/M_2 des filtrations à deux termes

$$(1.1.1) \quad M \supset M_1 \supset M_2.$$

De façon plus précise, on appelle *sous-quotient* de M la donnée d'une telle filtration (1.1.1). On remarquera que les sous-quotients des objets de \mathcal{A} forment une catégorie additive (en générale non abélienne), un morphisme de $M \supset M_1 \supset M_2$ dans $N \supset N_1 \supset N_2$ étant un morphisme de M dans N qui envoie M_1 dans N_1 et M_2 dans N_2 ; un tel morphisme induit alors naturellement un morphisme entre les gradués M_1/M_2 et N_1/N_2 .

Par restriction, les sous-quotients d'un objet M fixé forment aussi une catégorie, l'ensemble des morphismes de $M \supset M_1 \supset M_2$ dans $M \supset M'_1 \supset M'_2$ étant non vide si et seulement si M_1 est inclus dans M'_1 et M_2 dans M'_2 , et alors par définition cet ensemble se réduit au seul morphisme déduit de l'identité de M . On prendra garde toutefois qu'il est alors possible que le morphisme induit de M_1/M_2 dans M'_1/M'_2 soit un isomorphisme sans pour autant que le morphisme de sous-quotients originel ne soit inversible; une telle situation se produit par exemple lorsque M est un produit direct $A \times B$ et que l'on considère le morphisme naturel entre les sous-quotients $A \times B \supset A \times \{0\} \supset \{0\}$ et $A \times B \supset A \times B \supset \{0\} \times B$, les deux gradués associés s'identifiant naturellement à A .

Il sera commode pour la suite d'utiliser la notion de sous-quotient sous la forme suivante :

1.2. Définition. — Soient C et E deux objets d'une catégorie abélienne. On appelle *structure de sous-quotient de E sur C* la donnée d'un sous-quotient

$$(1.2.1) \quad E \supset E_1 \supset E_2$$

de E et d'un isomorphisme

$$(1.2.2) \quad \varphi : C \xrightarrow{\sim} E_1/E_2$$

de C sur le gradué associé.

1.3. — Ainsi, munir C d'une structure de sous-quotient de E équivaut encore à se donner, au choix :

- (i) un sous-objet F de E et un morphisme surjectif $p : F \twoheadrightarrow C$ (prendre $F = E_1$ et p la surjection de noyau E_2 déduite de φ^{-1}) ;
- (ii) un quotient Q de E et une injection $i : C \hookrightarrow Q$ (prendre $Q = E/E_2$ et i l'injection déduite de φ) ;
- (iii) un complexe court

$$(1.3.1) \quad \mathcal{E} : E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E''$$

avec i injective, p surjective, et $p \circ i = 0$, et un isomorphisme

$$(1.3.2) \quad C \xrightarrow{\sim} H(\mathcal{E}) = \ker p / \operatorname{im} i$$

de C sur la cohomologie de \mathcal{E} (prendre $E' = E_2$ et $E'' = E/E_1$).

Compte tenu de cette dernière caractérisation, on dira aussi parfois que les sous-quotients de E sont les objets de cohomologie de E .

Enfin on prendra garde, comme cela a déjà été signalé à la fin de 1.1, qu'il peut arriver qu'un même objet C admette plusieurs structures différentes de sous-quotient d'un même objet E .

1.4. — Soient E , F et G trois objets d'une catégorie abélienne. On va montrer que la donnée sur F d'une structure de sous-quotient de E et sur G d'une structure de sous-quotient de F détermine de façon naturelle sur G une structure de sous-quotient de E .

En effet, on dispose par hypothèse d'un isomorphisme $F \simeq E_1/E_2$ où $E_1 \supset E_2$ sont deux sous-objets de E et d'un isomorphisme $G \simeq F_1/F_2$ où $F_1 \supset F_2$ sont deux sous-objets de F . Par l'identification naturelle des sous-objets de E_1/E_2 aux sous-objets de E_1 contenant E_2 , F_1 et F_2 se relèvent canoniquement en deux sous-objets \widehat{F}_1 et \widehat{F}_2 de E vérifiant les inclusions

$$(1.4.1) \quad E_1 \supset \widehat{F}_1 \supset \widehat{F}_2 \supset E_2,$$

de sorte que G peut bien être muni de la structure de sous-quotient de E définie par la filtration à deux termes $E \supset \widehat{F_1} \supset \widehat{F_2}$ et par l'isomorphisme composé $G \simeq F_1/F_2 \simeq \widehat{F_1}/\widehat{F_2}$.

1.5. Définition. — La structure de sous-quotient de E définie sur G au paragraphe précédent sera appelée *structure de sous-quotient composée* des structures de sous-quotient de E sur F et de F sur G .

Dans cette situation, on dira aussi parfois que G et F sont deux *sous-quotients emboîtés* de E .

1.6. — Soient $(K, |\cdot|)$ un corps valué et E un K -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ compatible à $|\cdot|$. Puisqu'un K -espace vectoriel V muni d'une structure de sous-quotient de E peut être vu, au choix, comme un sous-espace d'un quotient ou comme un quotient d'un sous-espace de E , il hérite naturellement d'une norme obtenue à partir de la norme de E en considérant respectivement la norme restreinte de la norme quotient ou la norme quotient de la norme restreinte. On se convaincra facilement que ces deux constructions donnent la même norme sur V ; de façon plus précise :

1.7. Définition. — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $(K, |\cdot|)$ -espace vectoriel normé et V un K -espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E définie par une filtration $E \supset E_1 \supset E_2$ et un isomorphisme $\varphi : V \xrightarrow{\sim} E_1/E_2$. La norme de sous-quotient $\|\cdot\|_{\text{sq}}$ sur V est définie, pour $v \in V$, par la formule

$$(1.7.1) \quad \|v\|_{\text{sq}} = \inf_{e \in E_1, \varphi(v) = \bar{e}} \|e\|$$

où l'on a noté \bar{e} la classe dans E_1/E_2 de l'élément e de E_1 .

Étudions comment cette construction se comporte relativement à la composition des structures de sous-quotient :

1.8. Proposition. — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un $(K, |\cdot|)$ -espace vectoriel normé, F un K -espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E , et G un K -espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de F . Alors la norme sur G sous-quotient de la norme sur F sous-quotient de $\|\cdot\|_E$ coïncide avec la norme sur G sous-quotient de $\|\cdot\|_E$ relativement à la structure de sous-quotient composée.

On dira aussi que la formation des normes sous-quotient est transitive dans les sous-quotients emboîtés.

Démonstration. Notons $E \supset E_1 \supset E_2$ et $F \supset F_1 \supset F_2$ les filtrations et $p : E_1 \twoheadrightarrow F$ et $q : F_1 \twoheadrightarrow G$ les projections de noyaux E_2 et F_2 définissant

les structures de sous-quotient considérées. Notons aussi $\widehat{F_1}$ et $\widehat{F_2}$ les sous-espaces de E relevant F_1 et F_2 comme en (1.4.1), de sorte que $\widehat{F_1}$ (resp. $\widehat{F_2}$) est l'ensemble des éléments de E dont l'image par p appartient à F_1 (resp. F_2) et que l'application composée $q \circ (p|_{\widehat{F_1}})$ de $\widehat{F_1}$ sur G est bien une projection de noyau $\widehat{F_2}$ et définit la structure de sous-quotient composée. Alors, par construction, notant $\|\cdot\|_F$ la norme sur F sous-quotient de $\|\cdot\|_E$, et $\|\cdot\|_G$ la norme sur G sous-quotient de $\|\cdot\|_F$, on a pour $g \in G$:

$$\begin{aligned}
\|g\|_G &= \inf_{f \in F_1, q(f)=g} \|f\|_F \\
(1.8.1) \quad &= \inf_{f \in F_1, e \in E_1, q(f)=g, p(e)=f} \|e\|_E \\
&= \inf_{e \in \widehat{F_1}, q(p(e))=g} \|e\|_E,
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la norme de g pour la structure de sous-quotient composée. \square

Il sera aussi utile de pouvoir comparer les deux normes sous-quotient de deux normes sur un même espace :

1.9. Proposition. — *Soient C un réel, E un K -espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ vérifiant l'inégalité*

$$(1.9.1) \quad \|\cdot\| \leq C \|\cdot\|'$$

et V un K -espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E . Alors les normes sous-quotient $\|\cdot\|_{\text{sq}}$ de $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'_{\text{sq}}$ de $\|\cdot\|'$ sur V vérifient

$$(1.9.2) \quad \|\cdot\|_{\text{sq}} \leq C \|\cdot\|'_{\text{sq}}.$$

Démonstration. L'inégalité (1.9.1) passe à la borne inférieure dans (1.7.1). \square

2. Prolongement de sections holomorphes avec contrôle des normes

2.1. — On rappelle (cf. [10], chap. V §6) que si X est un espace analytique complexe et \mathcal{C} un \mathcal{O}_X -module cohérent, il existe une unique topologie de Fréchet sur l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathcal{C})$, appelée topologie canonique, qui rend continues toutes les applications de localisation

$$(2.1.1) \quad \Gamma(X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_x$$

en les fibres $x \in X$, lorsque le module \mathcal{C}_x sur l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est muni de la topologie canonique au sens de [12] (*i.e.* de la «Folgentopologie» de [9]). On dispose en outre des propriétés suivantes :

- (i) Si X est réduit, et si $\overline{\mathcal{E}}$ est un \mathcal{O}_X -module localement libre hermitien de type fini, la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{E})$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (cela résulte par exemple de [10] V §6 th. 8, du caractère local de la condition définissant la topologie canonique, et des compatibilités évidentes aux sommes directes).
- (ii) Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ est un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent, la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{C}')$ est la topologie induite par la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{C})$ pour l'inclusion naturelle (cela résulte de l'assertion analogue pour la topologie canonique sur les fibres : [9] II §2.7 Satz 9, pp. 97–99).
- (iii) Si $i : Z \hookrightarrow X$ est un sous-espace analytique fermé et si \mathcal{D} est un \mathcal{O}_Z -module cohérent, l'identification naturelle de $\Gamma(Z, \mathcal{D})$ et de $\Gamma(X, i_*\mathcal{D})$ est un homéomorphisme pour les topologies canoniques sur ces espaces (c'est une conséquence directe des définitions).

2.2. — On utilisera aussi dans cette partie la théorie des espaces 1-convexes élaborée dans [1] et [15]. On suivra ici la présentation de [17] :

Proposition-définition. — *Soit X un espace analytique complexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe sur X une fonction d'exhaustion continue qui est strictement plurisousharmonique hors d'un certain compact.*
- (ii) *L'espace X est holomorphiquement convexe et admet un sous-ensemble analytique compact sans points isolés maximal.*
- (iii) *L'espace X est une modification propre (au sens de [8]) d'un espace de Stein en un nombre fini de points.*
- (iv) *Pour tout faisceau analytique cohérent F sur X et tout entier $q \geq 1$, le groupe de cohomologie $H^q(X, F)$ est de dimension finie.*

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que X est 1-convexe.

Si X est 1-convexe, l'espace de Stein Y introduit en (iii) est unique (à isomorphisme près) ; c'est le réduit de Cartan-Remmert de X . Le sous-ensemble analytique compact maximal de (ii) est alors le support du lieu exceptionnel S de la modification $X \rightarrow Y$, et pour tout faisceau analytique cohérent F sur X et tout entier $q \geq 1$ on dispose d'un isomorphisme naturel

$H^q(X, F) \simeq H^q(S, F|_S)$. En outre, parmi les fonctions d'exhaustion continues dont l'existence est assurée par (i), il en est une qui est strictement plurisousharmonique en tout point du complémentaire de S .

L'implication (i) \implies (iv), qui est la seule dont nous aurons réellement besoin ici, est prouvée dans [1]. Les autres résultats découlent de [15], th. V, et des caractérisations classiques des espaces de Stein. On pourra consulter [17] pour un exposé synthétique de tout ceci.

2.3. — Parmi les exemples élémentaires d'espaces 1-convexes on trouve les espaces de Stein d'une part, et les espaces compacts d'autre part. Tout sous-espace fermé d'un espace 1-convexe est 1-convexe.

Un autre procédé de construction d'espaces 1-convexes dont nous aurons besoin est celui qui suit.

2.4. — Pour tout espace analytique complexe réduit X et pour tout \mathcal{O}_X -module inversible L muni d'une métrique continue $\|\cdot\|$, on note $V(X, L)$ l'espace total du fibré en droites dual L^\vee et, pour tout réel $r > 0$, $D_r(X, L)$ son fibré en disques ouverts de rayon r , relativement à la norme duale $\|\cdot\|^\vee$. Notons aussi

$$(2.4.1) \quad \pi : D_r(X, L) \twoheadrightarrow X$$

la projection naturelle et

$$(2.4.2) \quad \iota : X \hookrightarrow D_r(X, L)$$

la section nulle. Alors :

2.5. Proposition. — *Avec ces notations, si X est 1-convexe et si la métrique continue $\|\cdot\|$ sur L est à courbure strictement positive, le fibré en disques $D_r(X, L)$ est lui aussi 1-convexe.*

Démonstration. Supposons donnée une fonction d'exhaustion continue φ sur X strictement plurisousharmonique hors d'un compact K , et considérons aussi une fonction strictement convexe continue $\chi : [-\infty, \log r[\rightarrow \mathbb{R}_+$ tendant vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $\log r$. Alors il découle de l'hypothèse de stricte positivité sur la courbure de $\|\cdot\|$ que la fonction ψ définie pour $z \in D_r(X, L)$ par la formule

$$(2.5.1) \quad \psi(z) = \varphi(\pi(z)) + \chi(\log \|z\|^\vee),$$

continue et exhaustive sur $D_r(X, L)$, est bien strictement plurisousharmonique hors du compact $\iota(K)$. \square

Rappelons enfin la version suivante du théorème de l'application ouverte de Banach (cf. p. ex. [3], I §3, cor. 3 p. I.19 et ex. 4 p. I.28) :

2.6. Théorème. — *Soient E et F deux espaces de Fréchet et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue à conoyau de dimension finie. Alors le sous-espace $u(E)$ de F est fermé et l'application $u : E \longrightarrow u(E)$ est ouverte. En particulier, pour toute semi-norme continue p sur E il existe une semi-norme continue q sur F telle que, pour tout y dans $u(E)$, il existe x dans E vérifiant*

$$(2.6.1) \quad u(x) = y$$

et

$$(2.6.2) \quad p(x) \leq q(y).$$

Énonçons maintenant le résultat principal de cette section :

2.7. Théorème. — *Soient X un espace analytique 1-convexe réduit, \overline{L} un \mathcal{O}_X -module inversible hermitien à courbure strictement positive, \overline{E} un \mathcal{O}_X -module localement libre hermitien de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé réduit de X , et \overline{V} un \mathcal{O}_Y -module localement libre hermitien de type fini. On suppose donnés un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent F de E et un morphisme surjectif*

$$(2.7.1) \quad p : F \twoheadrightarrow i_* V$$

de \mathcal{O}_X -modules cohérents. Alors :

- (i) *Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide B de Y , il existe un réel $C > 0$ et un compact non vide A de X tels que pour tout $n \geq 0$, pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et pour tout $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\tilde{s}) = i_* s$, on ait*

$$(2.7.2) \quad \|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} \geq C e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}.$$

- (ii) *Il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide A de X , un réel $C' > 0$ et un compact non vide B de Y , tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ il existe $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\tilde{s}) = i_* s$ et*

$$(2.7.3) \quad \|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} \leq C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}.$$

La preuve de ce théorème, directement adaptée de [2], va occuper les paragraphes 2.8 à 2.14 :

2.8. — Conservons les notations introduites en 2.4, en posant pour alléger l'écriture

$$(2.8.1) \quad D(X) = D_1(X, L)$$

et, si A est une partie de X , $D_r(A, L)$ l'ensemble des points de $D_r(X, L)$ dont l'image par la projection canonique π est dans A ; on adoptera aussi les notations analogues sur Y . Remarquons notamment que $D_r(Y, L)$ s'identifie au produit fibré de $D_r(X, L)$ et de Y au-dessus de X . On notera encore

$$(2.8.2) \quad i : D(Y) \hookrightarrow D(X)$$

l'immersion fermée naturelle.

Par 2.1(i), la famille de semi-normes

$$(2.8.3) \quad \|\cdot\|_{D(X), A, r} = \|\cdot\|_{L^\infty(D_r(A, L), \pi^*E)}$$

(resp. $\|\cdot\|_{D(Y), B, r} = \|\cdot\|_{L^\infty(D_r(B, L), \pi^*V)$), pour A compact non vide de X (resp. B compact non vide de Y) et $r \in]0, 1[$, définit la topologie de Fréchet canonique sur $\Gamma(D(X), \pi^*E)$ (resp. sur $\Gamma(D(Y), \pi^*V)$).

La projection $\pi : D(X) \rightarrow X$ étant plate, l'injection $F \hookrightarrow E$ sur X se relève en $\pi^*F \hookrightarrow \pi^*E$ sur $D(X)$ et, passant aux sections globales, il résulte de 2.1(ii) que la topologie canonique sur

$$(2.8.4) \quad \Gamma(D(X), \pi^*F) \hookrightarrow \Gamma(D(X), \pi^*E)$$

est encore définie par la famille des semi-normes $\|\cdot\|_{D(X), A, r}$.

2.9. — Remarquons que l'action naturelle du groupe \mathbb{G}_m sur $V(X, L)$, définie par l'action des homothéties sur les fibres de L^\vee , se restreint en une action continue du groupe unitaire $U(1) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ sur $D(X)$. Pour tout entier k notons alors

$$(2.9.1) \quad \Gamma(D(X), \pi^*E)_k \subset \Gamma(D(X), \pi^*E)$$

le sous-espace formé des sections analytiques f de π^*E sur $D(X)$ vérifiant

$$(2.9.2) \quad f(uz) = u^k f(z)$$

pour tous $u \in U(1)$ et $z \in D(X)$, où l'on a identifié les fibres $(\pi^*E)_z$ et $(\pi^*E)_{uz}$ à leur image commune $E_{\pi(z)} = E_{\pi(uz)}$ par π .

Notons aussi

$$(2.9.3) \quad q_k : \Gamma(D(X), \pi^* E) \rightarrow \Gamma(D(X), \pi^* E)_k$$

la projection définie par la formule

$$(2.9.4) \quad q_k(f)(z) = \int_0^1 e^{-2i\pi kt} f(e^{2i\pi t} z) dt \in E_{\pi(z)}.$$

Pour tous A compact de X et $r \in]0, 1[$ on a clairement

$$(2.9.5) \quad \|q_k(f)\|_{D(X), A, r} \leq \|f\|_{D(X), A, r},$$

de sorte que q_k est continue.

Remarquons enfin que le sous-espace $\Gamma(D(X), \pi^* E)_k$ s'identifie naturellement à l'espace $\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes k})$ des sections analytiques de $E \otimes L^{\otimes k}$ sur X , cette identification associant à l'élément $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes k})$ la section analytique f de $\pi^* E$ sur $D(X)$ définie pour $z \in D(X)$ par

$$(2.9.6) \quad f(z) = \langle s(\pi(z)), z^{\otimes k} \rangle \in E_{\pi(z)},$$

où $s(\pi(z))$ appartient à la fibre $(E \otimes L^{\otimes k})_{\pi(z)}$ et où $z^{\otimes k}$ est considéré comme un élément de la droite complexe $L_{\pi(z)}^{\vee \otimes k}$. Avec ces notations, on a alors clairement

$$(2.9.7) \quad \|f\|_{D(X), A, r} = r^k \|s\|_{L^\infty(A)}$$

pour tous A compact de X et $r \in]0, 1[$.

2.10. — De la même façon, on dispose d'une action continue naturelle de $U(1)$ sur $\Gamma(D(X), \pi^* F)$ (resp. sur $\Gamma(D(Y), \pi^* V)$) à laquelle sont encore associés des sous-espaces propres $\Gamma(D(X), \pi^* F)_k$ (resp. $\Gamma(D(Y), \pi^* V)_k$) s'identifiant naturellement à $\Gamma(X, F \otimes L^{\otimes k})$ (resp. à $\Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes k})$) et des projections q_k définies par les mêmes formules, de sorte que les inégalités et égalités analogues à (2.9.5) et (2.9.7) restent valides.

Remarquons notamment que l'inclusion (2.8.4) est compatible à toutes ces constructions.

2.11. — En utilisant à nouveau la platitude de π pour relever sur $D(X)$ la suite exacte courte $0 \rightarrow \ker p \rightarrow F \rightarrow i_* V \rightarrow 0$, et en passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte

$$(2.11.1) \quad \Gamma(D(X), \pi^* F) \rightarrow \Gamma(D(X), \pi^* i_* V) \rightarrow H^1(D(X), \pi^* \ker p)$$

où, par la proposition 2.5 et par la caractérisation 2.2(iv) des espaces 1-convexes, le groupe de cohomologie $H^1(D(X), \pi^* \ker p)$ est de dimension finie. Compte tenu de 2.1(iii), $\Gamma(D(X), \pi^* i_* V) = \Gamma(D(X), i_* \pi^* V)$ s'identifie homéomorphiquement à $\Gamma(D(Y), \pi^* V)$, et l'on en déduit une application linéaire continue

$$(2.11.2) \quad \rho : \Gamma(D(X), \pi^* F) \longrightarrow \Gamma(D(Y), \pi^* V)$$

à conoyau de dimension finie.

2.12. — La continuité de ρ implique que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact B de Y , il existe $C > 0$, $r \in]0, 1[$ et A compact de X tels que, pour tout $\tilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^* F)$, posant $f = \rho(\tilde{f})$, on ait

$$(2.12.1) \quad \|f\|_{D(Y), B, e^{-\varepsilon}} \leq C^{-1} \|\tilde{f}\|_{D(X), A, r}.$$

Soient maintenant $n \geq 0$, $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\tilde{s}) = i_* s$. Si l'on note $f \in \Gamma(D(Y), \pi^* V)_n$ et $\tilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^* F)_n$ les éléments qui leur sont associés par l'analogie de (2.9.6), la commutativité du diagramme

$$(2.12.2) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(D(X), \pi^* F)_n & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(D(Y), \pi^* V)_n \\ \parallel & & \parallel \\ \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n}) & \xrightarrow{(i_*)^{-1} \circ p} & \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n}) \end{array}$$

implique qu'on a bien $f = \rho(\tilde{f})$, et (2.9.7) et (2.12.1) donnent

$$(2.12.3) \quad \begin{aligned} \|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} &= \|\tilde{f}\|_{D(X), A, 1} \\ &\geq \|\tilde{f}\|_{D(X), A, r} \\ &\geq C \|f\|_{D(Y), B, e^{-\varepsilon}} \\ &= C e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le point (i) du théorème.

2.13. — D'autre part, on peut aussi appliquer le théorème 2.6 à l'application ρ : on trouve ainsi que l'image $\text{im}(\rho) = \rho(\Gamma(D(X), \pi^* F))$ de ρ dans $\Gamma(D(Y), \pi^* V)$ est fermée (de sorte que la topologie quotient sur $\text{coker } \rho$ coïncide avec sa topologie usuelle de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie) et que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact A de X , il existe $C' > 0$, $r' \in]0, 1[$ et

B compact de Y tels que, pour tout $f \in \text{im}(\rho)$, il existe $\tilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)$ vérifiant $f = \rho(\tilde{f})$ et

$$(2.13.1) \quad \|\tilde{f}\|_{D(X), A, e^{-\varepsilon}} \leq C' \|f\|_{D(Y), B, r'}.$$

Par ailleurs, l'application ρ étant clairement $U(1)$ -équivariante, on en déduit par passage au quotient une action continue de $U(1)$ sur $\text{coker } \rho$. Ceci permet de considérer la décomposition

$$(2.13.2) \quad \text{coker } \rho = \bigoplus_n (\text{coker } \rho)_n$$

de ce conoyau en somme (finie!) de sous-espaces propres pour cette action, où $(\text{coker } \rho)_n$ est l'espace propre associé au caractère $(u \mapsto u^n)$ de $U(1)$. Notons alors n_0 le plus petit entier tel que $(\text{coker } \rho)_n$ soit nul pour $n \geq n_0$.

2.14. — Donnons-nous maintenant un réel $\varepsilon > 0$, un compact A de X , un entier $n \geq n_0$, et un élément $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ auquel par l'analogie de (2.9.6) on peut associer $f \in \Gamma(D(Y), \pi^*V)_n$. Puisque $(\text{coker } \rho)_n$ est nul, f appartient à $\text{im}(\rho)$, et par la discussion qui précède on peut écrire $f = \rho(\tilde{f})$ où $\tilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)$ vérifie (2.13.1). L'application ρ étant compatible aux projections q_n , on a encore $f = \rho(q_n(\tilde{f}))$ et, le diagramme (2.12.2) étant commutatif, notant $\tilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ l'élément associé à $q_n(\tilde{f})$, on trouve

$$(2.14.1) \quad p(\tilde{s}) = i_* s$$

avec, par (2.9.5), (2.9.7) et (2.13.1),

$$(2.14.2) \quad \begin{aligned} \|\tilde{s}\|_{L^\infty(A)} &= e^{n\varepsilon} \|q_n(\tilde{f})\|_{D(X), A, e^{-\varepsilon}} \\ &\leq e^{n\varepsilon} \|\tilde{f}\|_{D(X), A, e^{-\varepsilon}} \\ &\leq C' e^{n\varepsilon} \|f\|_{D(Y), B, r'} \\ &\leq C' e^{n\varepsilon} \|f\|_{D(Y), B, 1} \\ &= C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le point (ii).

La preuve du théorème étant achevée, indiquons maintenant comment celui-ci peut s'interpréter en termes de normes sous-quotient.

2.15. — Soient X un espace analytique *compact* réduit, \overline{L} un \mathcal{O}_X -module inversible hermitien à courbure strictement positive, \overline{E} un \mathcal{O}_X -module localement libre hermitien de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique

fermé réduit de X , et \overline{V} un \mathcal{O}_Y -module localement libre hermitien de type fini.

On suppose le \mathcal{O}_X -module cohérent i_*V muni d'une structure de sous-quotient de E ; rappelons que ceci correspond à la donnée d'un isomorphisme $\varphi : i_*V \simeq E_1/E_2$ où $E \supset E_1 \supset E_2$ est une filtration à deux termes de E par des sous- \mathcal{O}_X -modules cohérents.

Le faisceau L étant ample, le morphisme naturel

$$(2.15.1) \quad \psi : \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n}) / \Gamma(X, E_2 \otimes L^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(X, (E_1/E_2) \otimes L^{\otimes n})$$

est inversible pour tout n assez grand, de sorte que le morphisme composé

$$(2.15.2) \quad \psi^{-1} \circ \varphi : \Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n}) / \Gamma(X, E_2 \otimes L^{\otimes n})$$

munit $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n})$ d'une structure de sous-quotient de $\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n})$, relativement à la filtration

$$(2.15.3) \quad \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n}) \supset \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n}) \supset \Gamma(X, E_2 \otimes L^{\otimes n}).$$

Ainsi le \mathbb{C} -espace vectoriel $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n}) = \Gamma(Y, V \otimes i^*L^{\otimes n})$ dispose-t-il :

- de la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty(Y)}$ sur Y
- de la norme $\|\cdot\|_{\text{sq}, L^\infty(X)}$ provenant par la structure de sous-quotient de la norme uniforme sur X .

Alors :

2.16. Corollaire. — *Sous les hypothèses 2.15, il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$, deux réels $C > 0$ et $C' > 0$, tels que pour tout $n \geq n_0$ les deux normes sur $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n})$ ainsi construites vérifient les inégalités*

$$(2.16.1) \quad \|\cdot\|_{\text{sq}, L^\infty(X)} \geq C e^{-n\varepsilon} \|\cdot\|_{L^\infty(Y)}$$

et

$$(2.16.2) \quad \|\cdot\|_{\text{sq}, L^\infty(X)} \leq C' e^{n\varepsilon} \|\cdot\|_{L^\infty(Y)}.$$

Démonstration. Notant $F = E_1$ et $p : F \twoheadrightarrow i_*V$ la projection définissant la structure de sous-quotient sur i_*V (suivant la caractérisation 1.3(i)), on se retrouve en position d'appliquer le théorème. Compte tenu de la définition (1.7.1) des normes sous-quotient, l'inégalité (2.16.1) n'est autre qu'une traduction du point (i) du théorème où l'on a choisi $B = Y$, qui est bien compact puisque X l'est par hypothèse. De la même façon, l'inégalité (2.16.2) résulte du point (ii) du théorème avec $A = X$. \square

3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique

3.1. — On supposera ici le lecteur familier avec le langage de la géométrie d'Arakelov. Néanmoins, afin d'éviter toute ambiguïté, on commence par rappeler certaines notions de base et préciser les normalisations qui seront utilisées.

Soit K un corps de nombres d'anneau d'entiers \mathcal{O}_K . Un \mathcal{O}_K -module normé \overline{M} est la donnée d'un \mathcal{O}_K -module de type fini M et, pour tout plongement σ de K dans \mathbb{C} , d'une norme $\|\cdot\|_\sigma$ sur le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C}$, ceci de façon compatible à la conjugaison complexe. Notons alors M_{tors} le sous-module de torsion de M , $M_{\text{libre}} = M/M_{\text{tors}}$ son plus grand quotient sans torsion, qui s'identifie à un réseau de $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, et enfin $B \subset M_{\mathbb{R}}$ la boule unité de $M_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $m \in M_{\mathbb{R}}$ dont les images par les applications naturelles $M_{\mathbb{R}} \rightarrow M_\sigma$ sont de norme $\|m\|_\sigma \leq 1$ pour tout σ . Avec ces notations, le degré d'Arakelov de \overline{M} est le réel

$$(3.1.1) \quad \widehat{\deg} \overline{M} = \log \# M_{\text{tors}} - \log \text{vol}(M_{\mathbb{R}}/M_{\text{libre}})$$

où le volume $\text{vol}(M_{\mathbb{R}}/M_{\text{libre}})$ est pris relativement à l'unique mesure de Haar sur $M_{\mathbb{R}}$ qui donne à B le volume 1. Il pourra aussi s'avérer commode de considérer le degré d'Arakelov normalisé $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \widehat{\deg}$, comme on le trouve parfois dans la littérature.

3.2. — On vérifie aisément que si $(\|\cdot\|_\sigma)_\sigma$ et $(\|\cdot\|'_\sigma)_\sigma$ sont deux familles de normes munissant un même \mathcal{O}_K -module de type fini M de deux structures de \mathcal{O}_K -module normé \overline{M} et \overline{M}' , et si $C > 0$ est un réel tel que pour tout σ on ait

$$(3.2.1) \quad \|\cdot\|_\sigma \leq C \|\cdot\|'_\sigma,$$

alors

$$(3.2.2) \quad \widehat{\deg} \overline{M} \geq \widehat{\deg} \overline{M}' - \text{rg}_{\mathbb{Z}} M \log C$$

où $\text{rg}_{\mathbb{Z}} M = \dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = [K:\mathbb{Q}] \text{rg}_{\mathcal{O}_K} M$.

3.3. — Lorsque les normes $\|\cdot\|_\sigma$ proviennent de produits scalaires hermitiens $(\cdot, \cdot)_\sigma$ sur M_σ , on dit que le \mathcal{O}_K -module normé \overline{M} est un \mathcal{O}_K -module hermitien. On vérifie alors que le degré d'Arakelov de \overline{M} peut aussi s'exprimer sous la forme

$$(3.3.1) \quad \widehat{\deg} \overline{M} = \log \# M / (s_1, \dots, s_r) - \sum_{\sigma} \log \|s_1 \wedge \dots \wedge s_r\|_{\wedge^r M_\sigma}$$

où s_1, \dots, s_r sont des éléments de M dont les images dans le K -espace vectoriel M_K en forment une base, et où $\|\cdot\|_{\wedge^r M_\sigma}$ est la norme hermitienne puissance extérieure r -ième de $\|\cdot\|_\sigma$.

Si \overline{M} est un \mathcal{O}_K -module hermitien, et si

$$(3.3.2) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de \mathcal{O}_K -modules de type fini, les normes restreintes (resp. quotient) sur N (resp. sur Q) sont encore hermitiennes, et pour les structures de \mathcal{O}_K -modules hermitiens correspondantes on a

$$(3.3.3) \quad \widehat{\deg M} = \widehat{\deg N} + \widehat{\deg Q}.$$

3.4. — Considérons maintenant \mathfrak{X} un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ de fibre générique \mathfrak{X}_K réduite, $\overline{\mathcal{L}}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module inversible ample hermitien à courbure semi-positive, et $\overline{\mathcal{C}}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent muni d'une structure de sous-quotient d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module localement libre hermitien ; plus précisément, $\overline{\mathcal{C}}$ correspond à la donnée :

- d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{C} ,
- d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module localement libre hermitien $\overline{\mathcal{E}}$,
- d'une filtration à deux termes $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2$ de \mathcal{E} par des sous- $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents, et
- d'un isomorphisme $\varphi : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$.

On dira que $\overline{\mathcal{C}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent muni de métriques de sous-quotient.

Notons $d = \dim |\mathcal{C}|$ la dimension du support de \mathcal{C} (ainsi $d \leq \dim \mathfrak{X}$) et

$$(3.4.1) \quad [\mathcal{C}] = \sum_{x \in \mathfrak{X}_{(d)}} (\text{lg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x)[x]$$

le cycle de dimension d associé. On supposera enfin $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ muni d'une forme continue μ définissant une forme volume strictement positive en tout point du lieu lisse de $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ et compatible à la conjugaison complexe (remarquons qu'une telle forme existe sur tout espace analytique complexe projectif réduit). On aura alors à considérer l'une des deux situations suivantes :

Hypothèse (L^∞) : pour tout entier n , $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est muni d'une structure de \mathcal{O}_K -module normé au moyen des normes uniformes sur les $\mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})$.

Hypothèse ($L^2(\mu)$) : pour tout entier n , $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est muni d'une structure de \mathcal{O}_K -module hermitien au moyen des normes d'intégration $L^2(\mu)$ sur les $\mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})$.

Munissons alors $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ des normes restreintes, et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ des normes quotient.

3.5. Définition. — *La fonction de Hilbert-Samuel arithmétique*

$$(3.5.1) \quad h(\overline{\mathcal{C}}; \cdot) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

du $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent muni de métriques de sous-quotient $\overline{\mathcal{C}}$ est donnée par la formule

$$(3.5.2) \quad h(\overline{\mathcal{C}}; n) = \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}.$$

Si l'on veut préciser sous laquelle des hypothèses (L^∞) ou $(L^2(\mu))$ on s'est placé pour construire cette fonction de Hilbert-Samuel arithmétique, on pourra noter celle-ci $h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}}; \cdot)$ ou $h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; \cdot)$, respectivement.

3.6. — Remarquons que, les normes $L^2(\mu)$ étant hermitiennes, il résulte de (3.3.3) qu'on peut aussi écrire

$$(3.6.1) \quad h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; n) = \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} - \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)}.$$

L'égalité analogue pour les normes L^∞ n'a en revanche a priori pas de raison d'être vérifiée.

3.7. — Dans tous les cas, remarquons aussi que, le faisceau \mathcal{L} étant ample, le morphisme naturel

$$(3.7.1) \quad \psi : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, (\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est inversible pour tout n assez grand, de sorte que le morphisme composé

$$(3.7.2) \quad \psi^{-1} \circ \varphi : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$$

munit $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$, relativement à la filtration

$$(3.7.3) \quad \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \supset \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \supset \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Munissant alors $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de \mathcal{O}_K -module normé au moyen des normes sous-quotient des normes sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$, on trouve :

$$(3.7.4) \quad h(\overline{\mathcal{C}}; n) = \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}.$$

La suite de l'exposé fera appel aux deux résultats classiques suivants.

3.8. Lemme. — *Soient X un espace analytique complexe projectif réduit et L un \mathcal{O}_X -module inversible ample. Alors toute métrique continue à courbure semi-positive sur L est limite uniforme décroissante de métriques C^∞ à courbure strictement positive.*

Il s'agit du théorème 4.6.1 de [13], où X est supposé lisse. Remarquons toutefois que la preuve donnée dans [13] n'utilise cette hypothèse de lissité que pour montrer que toute fonction plurisousharmonique continue sur X est localement limite uniforme décroissante de fonctions plurisousharmoniques C^∞ . Or, puisqu'une fonction sur un espace analytique complexe est plurisousharmonique si et seulement si elle peut s'écrire localement comme restriction d'une fonction plurisousharmonique sur un espace lisse, ce résultat reste vrai en général.

3.9. Proposition. — *Soient X un espace analytique complexe projectif réduit muni d'une forme continue μ définissant une forme volume strictement positive sur son lieu lisse, \overline{L} un \mathcal{O}_X -module inversible ample muni d'une métrique (continue) à courbure semi-positive, et \overline{E} un \mathcal{O}_X -module localement libre hermitien. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c_\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ telles que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n})$, on ait*

$$(3.9.1) \quad c_\varepsilon e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(X)} \leq \|s\|_{L^2(\mu, X)} \leq C_\varepsilon e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(X)}.$$

Lorsque X est lisse, que les métriques et la forme volume sont C^∞ , et que la métrique sur L est à courbure strictement positive, il s'agit une conséquence directe du lemme 30 de [7]. Remarquons que la preuve donnée dans [7] reste encore valide si l'on suppose que la forme volume s'annule à l'ordre fini le long d'un fermé analytique de codimension strictement positive, et si la métrique sur E est continue. Le cas général s'en déduit alors, en approchant la forme volume continue par une forme volume C^∞ , en passant à une résolution des singularités, et en approchant la métrique sur L par une métrique C^∞ à courbure strictement positive au moyen du lemme 3.8.

3.10. Corollaire. — *Avec les notations de 3.4 et 3.5, on a*

$$(3.10.1) \quad |h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}}; n) - h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; n)| = o(n^d)$$

quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 1.9, de (3.2.2), de (3.7.4), de la proposition précédente, et du fait que d'après le théorème de Hilbert-Samuel géométrique, le rang du \mathcal{O}_K -module $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est un polynôme en n de degré au plus $d - 1$. \square

3.11. Lemme. — Soient X un schéma noethérien quasi-projectif² et \mathcal{C} un \mathcal{O}_X -module cohérent. Alors \mathcal{C} admet une filtration décroissante finie

$$(3.11.1) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{C}_N = 0$$

telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, il existe un sous-schéma fermé intègre Z_j de X , un \mathcal{O}_{Z_j} -module inversible \mathcal{M}_j et un isomorphisme

$$(3.11.2) \quad \mathcal{C}_{j-1}/\mathcal{C}_j \simeq i_{Z_j*}\mathcal{M}_j$$

où i_{Z_j} est le morphisme d'immersion de Z_j dans X .

De façon plus précise, si un \mathcal{O}_X -module inversible ample \mathcal{L} est donné, on peut prendre les \mathcal{M}_j de la forme $i_{Z_j}^*\mathcal{L}^{\otimes n_j}$ pour $n_j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Procédant par induction noethérienne, on va montrer que si \mathcal{C}' est un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent de \mathcal{C} maximal parmi ceux qui admettent une filtration vérifiant les propriétés énoncées dans le lemme, alors $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$. Dans le cas contraire, le \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{C}/\mathcal{C}' est non nul donc, par [11] IV 3.1.5, possède un cycle premier associé Z ; autrement dit, il existe un voisinage U du point générique z de Z dans X et une section s de \mathcal{C}/\mathcal{C}' sur U de support $Z \cap U$ ([11] IV 3.1.3(b)). D'autre part, par la caractérisation [11] II 4.5.2(a) des faisceaux amples, on peut après restriction supposer $U = X_f$ où f est une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X , pour un certain entier n . Alors, par [11] I 9.3.1(ii), il existe un entier m tel que $s \otimes f^{\otimes m}$ se prolonge en une section globale de $(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \otimes \mathcal{L}^{\otimes mn}$ sur X , de sorte que $s \otimes f^{\otimes m+1}$ définit une section globale de $(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m+1)n}$ de support Z , ou encore une injection

$$(3.11.3) \quad i_{Z*}\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}',$$

où l'on a posé $\mathcal{M} = i_Z^*\mathcal{L}^{\otimes -(m+1)n}$. Ainsi le sous- \mathcal{O}_X -module de \mathcal{C} image inverse pour la projection canonique de l'image de (3.11.3) dans \mathcal{C}/\mathcal{C}' contient \mathcal{C}' et admet une filtration du type considéré, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur \mathcal{C}' . \square

On est maintenant en mesure de prouver le «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» annoncé.

3.12. Théorème. — Avec les notations de 3.4 et 3.5, on a pour n tendant vers l'infini le développement asymptotique

$$(3.12.1) \quad h(\overline{\mathcal{C}}; n) = \frac{n^d}{d!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d \cdot [\mathcal{C}]) + o(n^d),$$

²c'est-à-dire admettant un faisceau inversible ample

où le nombre d'intersection arithmétique généralisé $(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.[\mathcal{C}])$ est défini au sens de [13], §5.

Démonstration. Remarquons d'abord que par le corollaire 3.10, il est indifférent pour prouver le théorème de considérer les normes L^∞ ou $L^2(\mu)$. Compte tenu du lemme 3.8, on ne perdra pas de généralité en supposant que la métrique sur \mathcal{L} est C^∞ à courbure strictement positive.

Le lemme 3.11 nous donne une filtration finie

$$(3.12.2) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{C}_N = 0$$

de \mathcal{C} et, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, un sous-schéma fermé intègre $i_{Z_j} : Z_j \hookrightarrow \mathfrak{X}$ et un \mathcal{O}_{Z_j} -module inversible \mathcal{M}_j tel que $i_{Z_j*}\mathcal{M}_j$ soit muni d'une structure de sous-quotient de \mathcal{C}

$$(3.12.3) \quad i_{Z_j*}\mathcal{M}_j \simeq \mathcal{C}_{j-1}/\mathcal{C}_j$$

et donc, par composition, d'une structure de sous-quotient de \mathcal{E}

$$(3.12.4) \quad i_{Z_j*}\mathcal{M}_j \simeq \widehat{\mathcal{C}_{j-1}}/\widehat{\mathcal{C}_j}$$

où

$$(3.12.5) \quad \mathcal{E}_1 = \widehat{\mathcal{C}_0} \supset \widehat{\mathcal{C}_1} \supset \cdots \supset \widehat{\mathcal{C}_N} = \mathcal{E}_2$$

est la filtration relevant (3.12.2) via l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{C} \simeq \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$. On notera $\overline{i_{Z_j*}\mathcal{M}_j}$ le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent muni de métriques de sous-quotient ainsi obtenu. Par la proposition 1.8, les normes sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_{j-1}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_j} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ obtenues lorsqu'on le considère comme sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ et celles obtenues lorsqu'on le considère comme sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ coïncident ; une application répétée de (3.3.3) donne alors

$$(3.12.6) \quad \begin{aligned} h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; n) &= \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} \\ &= \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_0} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_1} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} + \cdots \\ &\quad + \widehat{\deg} \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_{N-1}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_N} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} \\ &= h_{L^2(\mu)}(\overline{i_{Z_1*}\mathcal{M}_1}; n) + \cdots + h_{L^2(\mu)}(\overline{i_{Z_N*}\mathcal{M}_N}; n). \end{aligned}$$

Les supports des $i_{Z_j*}\mathcal{M}_j$ étant tous de dimension au plus d , ceci implique que le théorème sera vrai pour $\overline{\mathcal{C}}$ dès lors qu'il sera vrai pour les $\overline{i_{Z_j*}\mathcal{M}_j}$. Ainsi

on pourra maintenant supposer $\mathcal{C} = i_{Z*}\mathcal{M}$ où $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un sous-schéma fermé intègre de dimension d et \mathcal{M} un \mathcal{O}_Z -module inversible.

Sous cette hypothèse, considérons un entier n suffisamment grand pour que le morphisme naturel

$$(3.12.7) \quad \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, (\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \simeq \Gamma(\mathfrak{X}, (i_*\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$$

soit surjectif. Le \mathcal{O}_K -module $\Gamma(\mathfrak{X}, (i_*\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})$ dispose alors

- des normes uniformes $\|\cdot\|_{L^\infty(Z), \sigma}$ sur Z
- des normes $\|\cdot\|_{\text{sq}, L^\infty(\mathfrak{X}), \sigma}$ provenant par la structure de sous-quotient des normes uniformes sur \mathfrak{X} .

Le corollaire 2.16 permet de comparer ces deux normes, et les mêmes arguments que ceux de la preuve du corollaire 3.10 donnent pour n tendant vers l’infini l’estimation

$$(3.12.8) \quad |\widehat{\deg \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{\text{sq}, L^\infty(\mathfrak{X})} - \widehat{\deg \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^\infty(Z)}| = o(n^d).$$

Puisque par définition on a $\widehat{\deg \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{\text{sq}, L^\infty(\mathfrak{X})} = h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}}; n)$, il suffit pour conclure de vérifier

$$(3.12.9) \quad \widehat{\deg \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^\infty(Z)} = \frac{n^d}{d!}(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d \cdot Z) + o(n^d).$$

Or ceci n’est autre que le théorème 1.4 de [18]. □

Références

- [1] *A. Andreotti et H. Grauert*, Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193–259.
- [2] *J.-B. Bost*, Germs of analytic varieties in algebraic varieties : canonical metrics and arithmetic algebraization theorems, *in* Conférence à la mémoire de Bernard Dwork (Bressanone, 2001), à paraître.
- [3] *N. Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, chapitres 1 à 5, Éléments de mathématique, Masson, Paris, 1981.
- [4] *J.-P. Demailly*, On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem, *in* Complex Analysis and Geometry (Paris, 1997), Progr. Math. **188**, 47–82.
- [5] *J. Fornæss et R. Narasimhan*, The Levi problem on complex spaces with singularities, Math. Ann. **248** (1980), 47–72.

- [6] *H. Gillet et C. Soulé*, Arithmetic intersection theory, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **72**, 94–174.
- [7] *H. Gillet et C. Soulé*, An arithmetic Riemann-Roch theorem, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.
- [8] *H. Grauert*, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.
- [9] *H. Grauert et R. Remmert*, Analytische Stellenalgebren, Grundlehren Math. Wiss. **176**.
- [10] *H. Grauert et R. Remmert*, Theorie der Steinschen Räume, Grundlehren Math. Wiss. **227**; traduction anglaise : Theory of Stein Spaces, Grundlehren Math. Wiss. **236**.
- [11] *A. Grothendieck et J. Dieudonné*, Éléments de géométrie algébrique, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**.
- [12] *M. Jurchescu*, On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 129–153.
- [13] *V. Maillot*, Géométrie d’Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. France **80** (2000).
- [14] *L. Manivel*, Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d’un fibré hermitien, Math. Z. **212** (1993), 107–122.
- [15] *R. Narasimhan*, The Levi problem for complex spaces II, Math. Ann. **146** (1962), 195–216.
- [16] *H. Randriambololona*, Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d’utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l’approximation diophantienne, Thèse, Université Paris 11 Orsay, 2002.
- [17] *Vo Van Tan*, La classification des espaces 1-convexes, in Séminaire Pierre Lelong (Analyse) 1975/76, Lecture Notes in Math. **578**, 71–92.
- [18] *S. Zhang*, Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–221.